

Magnétostatique

I₅₁.

Un courant I parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre un losange de coté a et d'angles 60° et 120° . Déterminer (direction, sens, grandeur) le champ magnétique qu'il crée au centre du losange.

II₃₈. Étude d'un moteur électrique.

La conversion électromécanique dans les moteurs électriques est généralement basée sur l'interaction d'un champ magnétique et d'un courant électrique. Dans la machine que nous nous proposons d'étudier ici, le champ magnétique est créé par un bobinage fixe appelé stator. Un bobinage en rotation et alimenté par du courant continu constitue la seconde partie de la machine appelée rotor.

Les fortes densités de courant des supraconducteurs permettent de réaliser des stators tout aussi performants que ceux des machines à enroulements en cuivre, tout en diminuant les pertes énergétiques dans le matériau conducteur.

Dans toute la suite, les fréquences sont suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer que l'hypothèse des états quasi stationnaires s'applique à toutes les grandeurs variables envisagées.

A. Création du champ du stator.

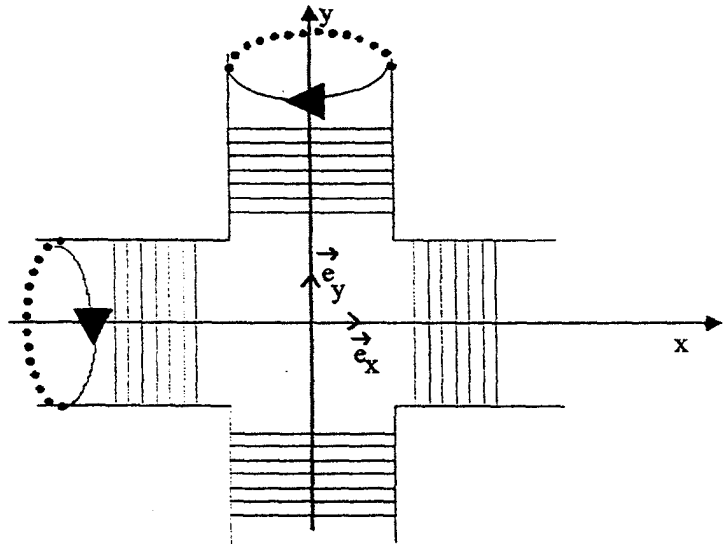
En faisant abstraction des spires manquant dans la partie centrale, le montage ci-dessous est considéré comme un ensemble de deux solénoïdes infinis et identiques, disposés dans le vide de sorte que leurs axes soient perpendiculaires et concourants en leur milieu O. Chaque solénoïde est composé d'un enroulement pratiquement circulaire réalisé sur un cylindre très long de rayon R , comportant N spires jointives par unité de longueur. Le solénoïde d'axe Ox est parcouru par un courant d'intensité $i_1(t)$, celui d'axe Oy est parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$. L'orientation des conducteurs est indiquée sur la figure n° 1. On veillera à respecter cette convention.

On suppose :

$$i_1(t) = I_m \cos(\omega t) \quad i_2(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

1) Montrer que le champ magnétique en tout point de la partie centrale est telle que $\vec{B}(t) = B_0 \vec{u}(t)$, où B_0 ne dépend pas du temps et où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire, du plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , dont on déterminera l'angle avec Ox en fonction du temps t .

2) Calculer B_0 sachant que l'enroulement de chaque solénoïde est fait de 5 couches superposées de spires jointives d'un fil de section circulaire de rayon $a = 0,1$ mm. On donne $I_m = 15,9$ A et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹.



B. Détermination des efforts sur le bobinage.

On considère un seul des solénoïdes, celui d'axe Ox. On se propose maintenant de déterminer les efforts subis par ce solénoïde sous l'action de son propre champ (la réponse à cette partie n'a pas d'incidence sur le reste du problème). On adopte un modèle dans lequel les courants électriques filiformes circulant dans les cinq couches du bobinage du solénoïde, sur une épaisseur $e = 10.a$, sont remplacés par une distribution volumique uniforme de courant. Le rayon intérieur du solénoïde, R , est égal à 5 cm. Le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{j} = J\vec{e}_\theta$.

1-a) Exprimer $J(t)$ en fonction de $i_1(t)$ et de a .

1-b) Exprimer la valeur maximale J_m de J . Faire l'application numérique avec $a = 0,1$ mm et $I_m = 15,9$ A. Préciser l'unité de J_m .

2-a) A l'aide du théorème d'Ampère, en supposant le solénoïde infini, déterminer en fonction de J , e , R , μ_0 et r l'expression du

champ magnétique $\vec{B}(r, t) = B(r, t)\vec{e}_x$ créé à la date t en un point situé à la distance r de l'axe. On rappelle que le champ magnétique est nul à l'extérieur d'un solénoïde infini.

2-b) Représenter graphiquement B en fonction de r à l'instant t où $J = J_m$.

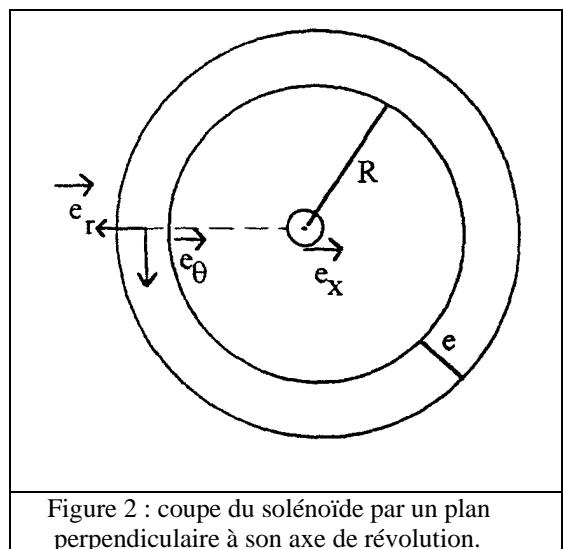


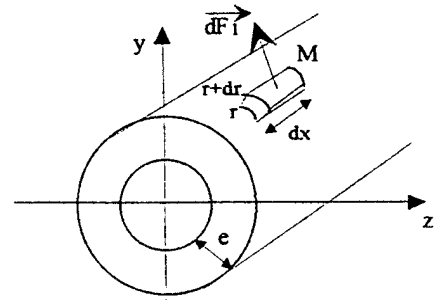
Figure 2 : coupe du solénoïde par un plan perpendiculaire à son axe de révolution.

3) En déduire la force élémentaire de Laplace $d\vec{F}_L(r, \theta)$ s'exerçant sur l'élément de volume $d\tau = r dr d\theta dx$ entourant le point M, en fonction de J , $B(r, t)$ et $d\tau$. On précisera le sens et la direction de cette force.

4) Par sommation sur le bobinage, en déduire, en fonction de J , e , R et μ_0 , l'expression littérale de la densité superficielle de force $\frac{dF}{dS}$ s'exerçant sur un élément de surface $dS = r d\theta dx$.

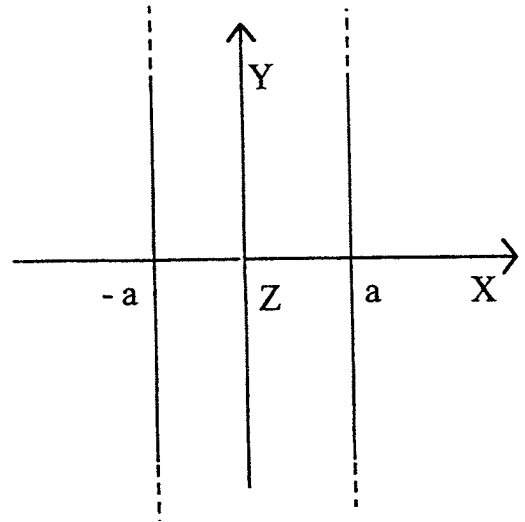
5) Application numérique : $e = 10a = 1 \text{ mm}$, $R = 5 \text{ cm}$.

Calculer la valeur de $\frac{dF}{dS}$ à la date t où $J = J_m$.



C. Etude d'un matériau supraconducteur.

Lorsqu'un matériau est dans l'état supraconducteur, il est dépourvu de toute résistance électrique et s'oppose à la pénétration du champ magnétique. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2a$. On associe à cette plaque un repère OXYZ, OX étant perpendiculaire à la plaque. La longueur et la largeur de la plaque étant beaucoup plus grandes que $2a$, on adopte le modèle d'une plaque illimitée dans les directions OY et OZ.



Cette plaque est plongée dans un champ magnétique uniforme dont on ne considère pas la dépendance temporelle. A l'extérieur de la plaque, on a $\vec{B}_e = B_e \vec{e}_y$.

Il se développe à l'intérieur de la plaque des courants supraconducteurs d'écrantage de densité volumique de module J_c constant, qui tendent à s'opposer au champ $\vec{B}_e(t)$, en créant, à l'intérieur de la plaque, un champ magnétique opposé.

Ces courants d'écrantage se développent d'abord sur la périphérie de la plaque et circulent sur une épaisseur d'autant plus importante que $\vec{B}_e(t)$ est intense. On ne s'intéresse pas à la portion du supraconducteur qui permet de fermer le circuit.

Dans le modèle de BEAN, l'écrantage du champ magnétique extérieur est réalisé dans la zone centrale $-x_{\text{sat}} < x < x_{\text{sat}}$ par une distribution volumique de courant périphérique caractérisée par le vecteur densité uniforme \vec{J}_e suivant :

Pour $x \in [-x_{\text{sat}}, x_{\text{sat}}]$, $\vec{J}_e = \vec{0}$;

pour $x \in [x_{\text{sat}}, a]$, $\vec{J}_e = +J_c \vec{e}_z$;

pour $x \in [-a, -x_{\text{sat}}]$, $\vec{J}_e = -J_c \vec{e}_z$.

On note \vec{B}_{int} le champ magnétique à l'intérieur de la plaque.

1-a) A partir d'un raisonnement reposant sur des arguments qualitatifs à préciser soigneusement :

α) Montrer que \vec{B}_{int} ne possède qu'une composante sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

β) Etablir que cette composante ne dépend que de x .

γ) Comparer les composantes $B_{\text{int}}(x)$ et $B_{\text{int}}(-x)$.

1-b) A partir du théorème d'Ampère :

α) Etablir que \vec{B}_{int} est uniforme dans la zone $x \in [-x_{\text{sat}}, x_{\text{sat}}]$.

β) Trouver B_{int} en fonction de x , J_c , x_{sat} , a et B_e pour tout $x \in [-a, a]$.

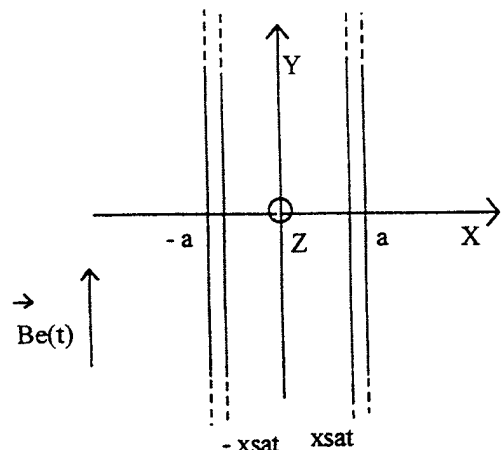
Vérifier que les résultats satisfont aux conditions aux limites.

1-c) En déduire une relation entre x_{sat} , J_c , B_e et a lorsque le champ magnétique est nul dans la zone centrale ($x \in [-x_{\text{sat}}, x_{\text{sat}}]$).

1-d) Montrer que cette relation n'est valable que pour $0 < B_e < B_{\text{max}}$; déterminer B_{max} .

1-e) Représenter $B_{\text{int}}(x)$ en fonction de x pour $-a < x < +a$.

2) D'autres modèles d'écrantage pourraient être proposés.



2-a) Montrer que, dans tout modèle, on doit avoir $\vec{J} = J(x)\vec{e}_z$.

2-b) Donner, en justifiant, la condition à respecter sur la fonction $J(x)$ pour que le modèle soit adapté au problème.

III₅₉. Solénoïde épais.

1) Une spire de centre O, de rayon R et située dans le plan Oxy est parcourue par un courant I dans le sens allant de Ox vers Oy. Calculer le champ magnétique au point M de coordonnées cartésiennes (0, 0, z). On fera une démonstration et on exprimera le résultat en fonction de l'angle θ sous lequel on voit de M le rayon de la spire.

2) Un solénoïde de longueur L est considéré comme constitué par une seule couche de N spires jointives de rayons R et d'axe Oz, à raison de $n = N/L$ spires par unité de longueur. Soit α_1 et α_2 les angles sous lesquels on voit d'un point M de Oz le rayon de la première spire et celui de la dernière. Toutes les spires sont parcourues par le même courant I dans le même sens qu'à la question précédente. On considère d'abord un point M de l'axe du solénoïde, à l'extérieur de celui-ci. Démontrer l'expression du champ magnétique en M.

3) Calculer le champ magnétique au centre O du solénoïde.

4) Une bobine épaisse est constituée de N' nappes de spires, chacune ayant un rayon R' différent, et semblables pour le reste au solénoïde de la question 2 ; ces nappes sont enroulées les unes autour des autres. La bobine a pour longueur L, pour rayon intérieur R₁ et pour rayon extérieur R₂. On note $n' = N'/(R_2 - R_1)$ le nombre de nappes par unité d'épaisseur. Calculer le champ magnétique au centre O de cette bobine.

On donne : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

5) Exprimer le diamètre d du fil en fonction de n.

6) Quelle est la relation entre n et n' si la vue en coupe des spires jointives de la bobine est celle :

a) de la figure a ?

b) de la figure b ?

7) Quel est le meilleur de ces deux arrangements de spires jointives dont la coupe est représentée ci-contre ?

8) Calculer numériquement le champ magnétique en O si :

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI $L = R_2 = 5$ cm $R_1 = 2,5$ cm $I = 1$ A $n = n' = 1000$ spire/m

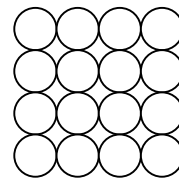


figure a

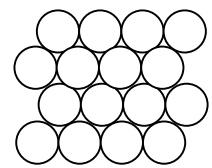


figure b

IV₂₆.

Soit a une constante positive et j₀ une autre constante. Considérons le champ magnétique créé par la distribution de courant de densité volumique :

Si $x > 0$, $\vec{j} = j_0 \exp(-x/a)\vec{u}_y$;

Si $x < 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.

1) Déterminer ce qu'implique la symétrie.

2) Montrer que les limites du champ magnétique quand $x \rightarrow \pm\infty$ sont opposées.

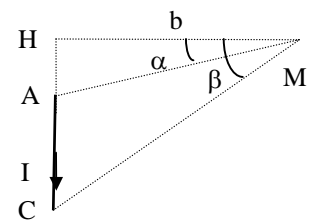
3) Déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.

V₄₄.

1) Déterminer la direction, le sens et la grandeur du le champ magnétique créé par un segment AC parcouru par un courant I en un point M quelconque, à une distance b de la projection H de M sur le segment et d'où l'on voit AH et HC sous les angles α et β .

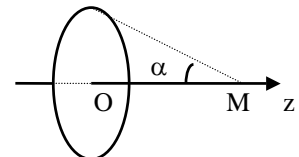
2) Un carré de coté a est parcouru par un courant I Exprimer le champ magnétique en son centre.

3) Exprimer le champ magnétique au point symétrique du centre du carré par rapport à un coté du carré.



VI₂₃.

1) Soit une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz et parcourue par un courant constant I. Montrer par un argument précis de symétrie que le champ magnétique en un point de l'axe est porté par cet axe. On note dans la suite B(z) la mesure algébrique du champ magnétique sur l'axe Oz au point d'abscisse z.



2) Déterminer le sens du courant pour lequel B(z) est positif au point M de la figure (la partie de l'axe en pointillé est vue en perspective derrière le disque délimité par la spire).

3) Calculer B(z). Exprimer le résultat en fonction du champ magnétique au centre B₀, de z et R.

4) Tracer qualitativement le graphe de B(z) en fonction de z.

5) De combien peut-on s'écarter du centre de la spire en restant dans son axe pour que B_z ne diffère pas de plus de un pour cent de sa valeur au centre ?

6) En utilisant l'expression de la troisième question, de combien doit-on s'écarter du centre de la spire en restant sur son axe pour que B_z soit inférieur à un millièème de sa valeur au centre ?

7) On s'intéresse à présent au champ magnétique au voisinage de l'axe. On souhaite donc exprimer les coordonnées cylindriques (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique en fonction des coordonnées cylindriques r, θ, z du point considéré. Montrer par un argument précis de symétrie que $B_\theta = 0$.

8) Montrer par un argument précis de symétrie que B_r et B_z ne dépendent que de r et z .

9) On se propose de développer $B_z(r, z)$ et $B_r(r, z)$ en puissances successives de r . On admet que le même développement est valable pour r positif ou négatif (un point de coordonnée r négative est le symétrique par rapport à Oz du point de coordonnée $-r$), ce qui suppose que le champ magnétique ne présente pas de singularité sur l'axe. Déterminer par un argument de symétrie précis la parité en r de la fonction de r (à z constant) $B_z(r, z)$ et la forme de son développement jusqu'à l'ordre 2.

10) Déterminer par un argument de symétrie précis la parité en r de la fonction de r (à z constant) $B_r(r, z)$ et la forme de son développement jusqu'à l'ordre 2.

11) Au voisinage de l'axe, le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. S'agit-il d'une propriété générale du champ magnétique valable en toute région, ou bien y a-t-il une raison particulière la justifiant ?

12) Exprimer le flux du champ magnétique à travers une surface fermée formée d'un cylindre d'axe Oz , de rayon r petit et de longueur dz , ce cylindre étant complété par deux disques terminaux d'abscisse z et $z + dz$, en négligeant les termes d'ordre en r supérieur à r^2 . En déduire que $B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}$.

13) Au voisinage de l'axe, la circulation du champ magnétique sur un parcours fermé est nulle. S'agit-il d'une propriété générale du champ magnétique valable en toute région, ou bien y a-t-il une raison particulière la justifiant ?

14) Calculer la circulation du champ magnétique le long d'un rectangle de cotés dz et r petit, en négligeant les termes d'ordre supérieur à r^2 . En déduire que $B_z(r, z) = B_z(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_z(z)}{dz^2}$.

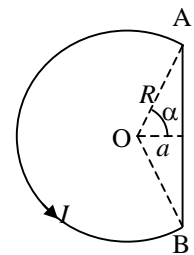
15) Calculer explicitement $B_z(r, z = 0)$ à cette approximation.

16) De combien peut-on s'écarter du centre de la spire en restant dans son plan pour que B_z ne diffère pas de plus de un pour cent de sa valeur au centre ?

VII.46. Validité du calcul du champ magnétique d'un courant rectiligne infini.

Les formules utilisées en magnétostatique ne sont valables que pour des circuits électriques complets et stationnaires. Néanmoins, on calcule le champ magnétique d'un courant rectiligne infini, bien que le circuit soit incomplet puisque les charges transportées ne peuvent revenir à leur point de départ. Montrons que le résultat est quand même correct, en imaginant un retour du courant à grande distance.

Soit le circuit ci contre, parcouru par un courant I , constitué d'un segment AB et d'un arc de cercle AB de rayon R et de centre O . On note $2\alpha = \pi - 2\varphi$ l'angle sous lequel le segment est vu de O et a la distance de O au segment AB .



1) Calculer la contribution B_1 au champ magnétique en O du segment.

2) Calculer la contribution B_2 au champ magnétique en O de l'arc de cercle.

3) Déterminer numériquement la valeur minimale de R/a pour que le champ magnétique B de cet ensemble diffère de moins de 1 % du champ magnétique B_0 créé par un courant I rectiligne selon la droite infinie AB .

Réponses

I. B est perpendiculaire au plan du losange et dirigé vers l'arrière ; $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

II. A.1. $B_0 = \mu_0 N I_m$ (Ox, \vec{u}) = ωt ; A.2. $B_0 = \frac{5\mu_0 I_m}{2a} = 0,50 \text{ T}$; B.1.a. $J = \frac{i_1}{4a^2}$; B.1.b.

$$J_m = 3,975 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} ;$$

B.2.a. $\vec{B} = \mu_0 J e \vec{e}_x$ si $r < R$, $\vec{B} = \mu_0 J (R + e - r) \vec{e}_x$ si $R < r < R + e$, $\vec{B} = \vec{0}$ si $r > R + e$;

B.2.b. $B = B_e$ si $|x| > a$, $B = B_e - \mu_0 J_c (a - |x|)$ si $x_{sat} < |x| < a$, $B_e - \mu_0 J_c (a - x_{sat})$ si $|x| < x_{sat}$;

C.1.c. $\boxed{B_e = \mu_0 J_c (a - x_{sat})}$; C.1.d. Il faut que $0 < x_{sat} < a$, soit $B_e < \boxed{B_{max} = \mu_0 J_c a}$; C.1.e. voir corrigé ;

C.2.a. $\vec{J} = J(x) \vec{e}_z$; C.2.b voir corrigé.

III. 1) Oz est un axe de révolution de la distribution de courant, donc $B = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2R}$; 2)

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) ; 3) \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + 4R^2/L^2}} \vec{u}_z ; 4) B = \frac{\mu_0 n n' L I}{2} \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + L^2/4}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + L^2/4}} ; 5)$$

$d = \frac{1}{n}$; 6.a) $n = n'$; 6.b) $n = \frac{1}{d}$ $n' = \frac{2n}{\sqrt{3}}$; 7) b est préférable, car plus solide ; 8) $B = 0,0177 \text{ T}$.

IV. 1) $\vec{B} = B(x) \vec{u}_z$; 3) Si $x < 0$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \vec{u}_z$; si $x > 0$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \left[2 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) - 1 \right] \vec{u}_z$.

V. 1) $B = \frac{\mu_0 I (\sin \beta - \sin \alpha)}{4\pi b}$; 2) $B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$; 3) $B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \sqrt{2} \right)$.

VI. 1) axe de révolution ; 3) $\vec{B} = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2} \vec{u}_z$, où $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$; 5) $\frac{z}{R} < 0,082$; 6) $\frac{z}{R} > 10$; 7) tout plan

méridien est un plan d'antisymétrie du courant ; 8) axe de révolution ; 9) $B_z(r, z) = B(z) + r^2 f(z)$, fonction paire de r ; 10) $B_r(r, z) = r g(z)$, fonction impaire de r ; 11) propriété générale ; 13) théorème d'Ampère et pas de courant

dans la région ; 15) $B_z(r, 0) = B_0 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} \right)$; 16) $\frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} < 0,01 \Rightarrow \frac{r}{R} < \sqrt{\frac{4}{3}} \times 0,01 = 0,115$.

VII. 1) $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta \cos \theta}{a} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi a}$; 2) $B_2 = \frac{\mu_0 I (\pi + 2\varphi)}{4\pi R}$; 3) $\frac{R}{a} > 50\pi$.

Corrigé

I.

Chaque élément $I d\vec{\ell}$ produit un champ magnétique perpendiculaire au plan du losange et dirigé vers l'arrière, donc \vec{B} a cette direction et ce sens.

Les plans perpendiculaires au plan du losange et contenant une de ses diagonales sont des plans d'antisymétrie du courant, donc les contributions au champ magnétique des quatre cotés du losange sont égales et le champ magnétique est le quadruple du champ d'un coté.

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin(\theta + \pi/2)}{r^2}$$

$$\ell = b \tan \theta \quad d\ell = \frac{bd\theta}{\cos^2 \theta} \quad \frac{b}{r} = \cos \theta \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \quad B = 4 \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{bd\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \cos \theta d\theta$$

Par projections successives

$$b = a \cos 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad B = \frac{4\mu_0 I}{\pi a\sqrt{3}} [\sin \theta]_{-\pi/3}^{\pi/6} = \frac{4\mu_0 I}{\pi a\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \boxed{B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}$$

II.

A.1. $\vec{B} = \mu_0 N i_1 \vec{e}_x - \mu_0 N i_2 \vec{e}_y$

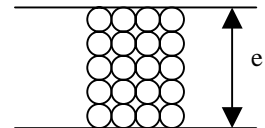
Comme $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \frac{\pi}{2})] = -\sin \omega t$

$$\vec{B} = \mu_0 N I_m (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$$B_0 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad \boxed{B_0 = \mu_0 N I_m \quad (Ox, \vec{u}) = \omega t}$$

A.2. Dans une tranche d'épaisseur dx , il y a 5 tranches de chacune $\frac{dx}{2a}$ spires, donc :

$$N = \frac{5 \frac{dx}{2a}}{dx} = \frac{5}{2a} \quad B_0 = \frac{5\mu_0 I_m}{2a} = \frac{5 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 15,9}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,50 \text{ T}$$

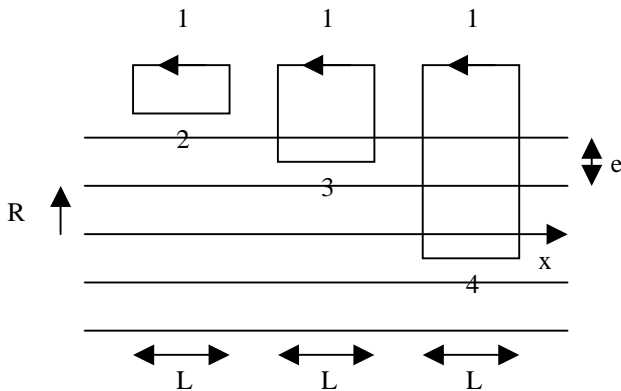


B.1.a. $J = \frac{5 \frac{dx}{2a} i_1}{e dx} = \frac{i_1}{4a^2}$

En d'autres termes, chaque spire coupe un plan contenant l'axe du solénoïde comme l'indique la figure, occupant un carré de coté $2a$: $\boxed{J = \frac{i_1}{4a^2}}$

B.1.b. $J_m = \frac{I_m}{4a^2} = \frac{15,9}{4(10^{-4})^2} = \boxed{3,975 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}}$

B.2.a.



Tout plan perpendiculaire à l'axe Ox du solénoïde est un plan de symétrie du courant, donc d'antisymétrie du champ magnétique ; donc celui-ci est parallèle à Ox. La distribution du courant est invariante par translation parallèle à Ox et par rotation autour de cet axe, donc $\vec{B} = B(r)\vec{e}_x$.

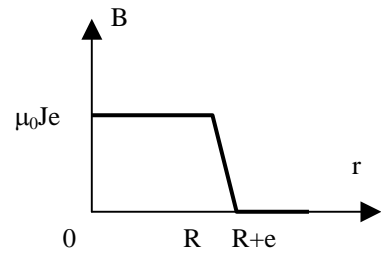
Appliquons le théorème d'Ampère à un rectangle situé dans un plan contenant l'axe du solénoïde, dont l'un des cotés noté 1, de longueur L , est parallèle à cet axe et situé à l'extérieur du solénoïde et dont le coté opposé :

- noté 2 est aussi à l'extérieur du solénoïde : $(B_2 - B_1)L = 0$, ce qui montre que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde ;

en fait, il est nul dans cette région ;

- noté 3 est à l'intérieur de l'enroulement : $(B_3 - B_1)L = \mu_0 J(R + e - r)L \Rightarrow B_3 = \mu_0 J(R + e - r)$
- noté 4 est à l'intérieur du solénoïde : $(B_4 - B_1)L = \mu_0 J e L \Rightarrow B_3 = \mu_0 J e$

En résumé :
$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 J e \vec{e}_x & \text{si } r < R \\ \mu_0 J (R + e - r) \vec{e}_x & \text{si } R < r < R + e \\ \vec{0} & \text{si } r > R + e \end{cases}$$



B.2.b. Voir ci-contre.

B.3.
$$d\vec{F} = \vec{J} d\tau \wedge \vec{B} = J \vec{e}_\theta d\tau \wedge B \vec{e}_x = \boxed{J B d\tau \vec{e}_r}$$

B.4. Soit $y = R + e - r$;

$$dF = J \cdot \mu_0 J y \cdot dS dy \Rightarrow \frac{dF}{dS} = \mu_0 J^2 \int_0^e y dy = \boxed{\frac{\mu_0 J^2 e^2}{2}}$$

B.5.
$$\frac{dF_m}{dS} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (4 \cdot 10^8 \times 10^{-3})^2}{2} = \boxed{10^5 \text{ Pa}}$$

Cette force est très grande ; elle impliquerait une grande solidité de l'enroulement. Comme elle varie au cours du temps, elle créerait des vibrations auxquelles la bobine devrait résister (pas de résonance) et un sifflement. En pratique, les champs de l'ordre du tesla sont créés par des électroaimants, qui combinent bobinages et noyaux de fer pour obtenir de plus forts champs magnétiques.

C.1.a.α. Le champ magnétique est la somme du champ magnétique extérieur uniforme $B_e \vec{e}_y$ et du champ magnétique intérieur \vec{B}_i produit par le courant d'écrantage. Tout plan parallèle à OXZ est un plan d'antisymétrie du champ magnétique extérieur et de symétrie du courant d'écrantage, donc d'antisymétrie du champ magnétique intérieur et du champ magnétique total ; donc le champ magnétique total $\vec{B} = B_e \vec{e}_y + \vec{B}_i$ est parallèle à l'axe des Y :

$$\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_y$$

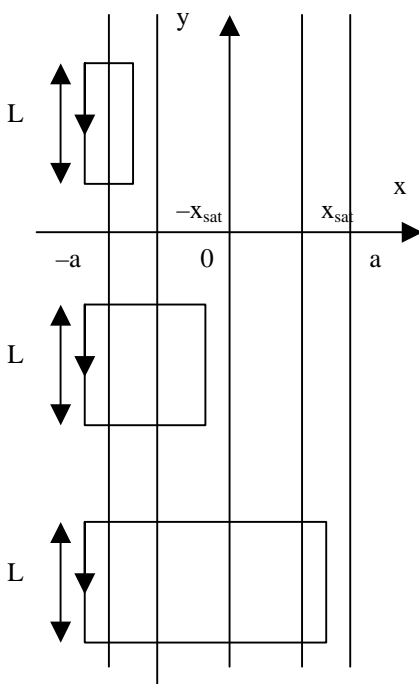
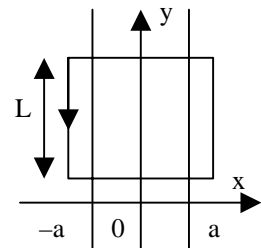
C.1.a.β. Le problème est invariant dans toute translation parallèle au plan OYZ, donc $\vec{B} = B(x) \vec{e}_y$

C.1.a.γ. Le plan OYZ est un plan d'antisymétrie du courant d'écrantage, donc un plan de symétrie du champ magnétique interne ; c'est aussi un plan de symétrie du champ magnétique externe, donc c'est un plan de symétrie du champ magnétique total. Par conséquent, $B(x)$ est une fonction paire de x .

C.1.b. Montrons tout d'abord que le courant d'écrantage ne modifie pas le champ magnétique à l'extérieur du supraconducteur.

Calculons le champ magnétique à l'extérieur d'une couche de courant électrique caractérisé par la densité volumique de courant :

$$\vec{j} = \begin{cases} J \vec{e}_z & \text{si } |x| < a \\ \vec{0} & \text{si } |x| > a \end{cases}$$



Tout plan parallèle à Oxz est un plan de symétrie du courant, donc d'antisymétrie du champ magnétique ; donc le champ magnétique est parallèle à l'axe des y ; le problème est invariant dans toute translation parallèle au plan Oyz, donc $\vec{B} = B(x) \vec{e}_y$; le plan Oyz est un plan de symétrie du courant, donc d'antisymétrie du champ magnétique ; donc $B(x)$ est une fonction impaire de x .

Appliquons le théorème d'Ampère au rectangle de la figure :

$$2BL = \mu_0 J 2aL ;$$

donc : si $x > a$ $B(x) = \mu_0 J a$, si $x < -a$ $B(x) = -\mu_0 J a$.

En ajoutant les champs magnétiques créés par les deux couches d'écrantage, on obtient alors un champ magnétique nul à l'extérieur du supraconducteur : par exemple, dans la région $x > a$, la couche de droite crée le champ $\vec{B} = \mu_0 J_c \frac{a - x_{sat}}{2} \vec{e}_y$ et la couche de gauche crée le champ

opposé, donc le champ magnétique créé par ces deux couches est nul.

Il reste donc à calculer le champ magnétique dans le supraconducteur.

Appliquons le théorème d'Ampère aux trois rectangles de la figure de gauche :

$$[B(x) - B_e]L = \mu_0 L \int_{-a}^x j(x) dx$$

si $-a < x < -x_{sat}$ $B(x) = B_e - \mu_0 J_c(x + a)$

si $-x_{sat} < x < x_{sat}$ $B(x) = B_e - \mu_0 J_c(a - x_{sat})$

si $x_{sat} < x < a$ $B(x) = B_e - \mu_0 J_c(a - x_{sat}) + \mu_0 J_c(x - x_{sat})$
 $= B_e - \mu_0 J_c(a - x)$

Explication simplifiée : appliquons le théorème d'Ampère au rectangle de droite :

$$[B(x_2) - B(x_1)]L = \mu_0 L \int_{x_1}^{x_2} j_z(x) dx, \text{ donc } \vec{B} \text{ est uniforme dans une région sans}$$

courant et plus généralement $\frac{dB}{dx} = \mu_0 j_z(x)$; vues de très loin, les deux couches de

courant d'écrantage sont très proches et portent des courants opposés, donc se neutralisent et créent un champ magnétique interne nul : le courant d'écrantage ne

modifie pas le champ magnétique à l'extérieur ; l'expression de $\frac{dB}{dx}$ donne alors :

$$B = \begin{cases} B_e & \text{si } |x| > a \\ B_e - \mu_0 J_c(a - |x|) & \text{si } x_{sat} < |x| < a \\ B_e - \mu_0 J_c(a - x_{sat}) & \text{si } |x| < x_{sat} \end{cases}$$

Quelles sont les conditions aux limites à vérifier ? Comme il n'y a que des densités volumiques finies de courant, le champ magnétique doit être fonction continue de x . C'est ce qu'on vérifie :

si $x = \pm a$ $\vec{B} = B_e \vec{e}_y$

si $x = \pm x_{sat}$ $\vec{B} = [B_e - \mu_0 J_c(a - x_{sat})] \vec{e}_y$

C.1.c. $[B_e - \mu_0 J_c(a - x_{sat})]$

C.1.d. Il faut que $0 < x_{sat} < a$, soit

$$B_e < [B_{max} = \mu_0 J_c a]$$

C.1.e. Voir ci-contre

C.2.a.

- Tout plan parallèle à OXY est un plan de symétrie du champ magnétique extérieur ; si on annule le champ magnétique dans le supraconducteur, tout plan parallèle à OXY est un plan de symétrie du champ magnétique interne, donc est un plan d'antisymétrie du courant d'écrantage ; donc le courant d'écrantage est perpendiculaire à cette famille de plan, c'est-à-dire parallèle à OZ.

- Le problème est invariant dans toute translation parallèle au plan OYZ, donc $\vec{J} = J(x) \vec{e}_z$

C.2.b.

- Le plan OYZ est un plan de symétrie du champ magnétique externe et du champ magnétique total ; c'est donc un plan de symétrie du champ magnétique interne, donc un plan d'antisymétrie du courant d'écrantage. Donc $J(x)$ est une fonction impaire de x .

- Le signe de $J(x)$ doit être celui de x pour que le courant d'écrantage réduise le champ magnétique dans le supraconducteur.

- $J(x)$ est une fonction non décroissante de x . En effet, il ne serait pas logique que le courant d'écrantage soit plus grand là où le champ magnétique est plus petit.

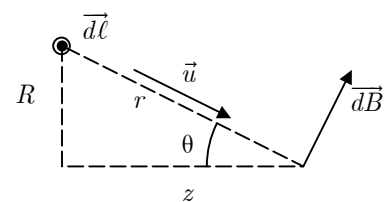
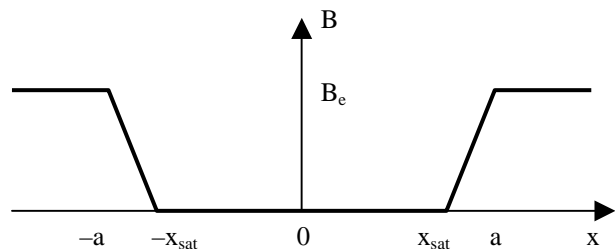
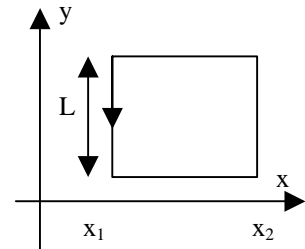
III.

1) Oz est un axe de révolution de la distribution de courant, donc

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

$$B = \int dB \sin \theta = \int \frac{\mu_0 I d\ell \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int d\ell = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2R}$$



2) Soit dN le nombre de spires dans la tranche dx :

$$dN = ndx = nd(R \cotan \theta) = -\frac{nR d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$B(M) = \int \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2R} dN = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{\mu_0 n I \sin \theta}{2} d\theta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

3)

$$\cos \alpha_2 = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2/L^2}}$$

$$\alpha_1 = \pi - \alpha_2 \quad \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + 4R^2/L^2}} \vec{u}_z$$

4) Dans l'intervalle dR' , il y a $n'dR'$ nappes, chacune produisant son champ magnétique. Donc $B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 n I n' dR'}{\sqrt{1 + 4R'^2/L^2}}$. Faisons le changement de variable

$$u = \frac{2R'}{L} \quad du = \frac{2dR'}{L}$$

$$B = \frac{\mu_0 n I n' L}{2} \int_{\frac{R_1}{2L}}^{\frac{R_2}{2L}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\mu_0 n n' L I}{2} \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + L^2/4}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + L^2/4}}$$

5) $d = \frac{1}{n}$

6.a) $n = n'$

6.b) La distance entre deux couches est $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. $n = \frac{1}{d}$ $n' = \frac{2}{d\sqrt{3}} = \frac{2n}{\sqrt{3}}$

7) L'arrangement b est préférable, car les spires sont calées et résisteront aux forces magnétiques.

8) $B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times (10^3)^2 \times 0,05}{2} \ln \frac{5 + \sqrt{5^2 + 2,5^2}}{2,5 + \sqrt{2,5^2 + 2,5^2}} = 0,0177 \text{ T}$

IV.

1) Tout plan parallèle à xOy est un plan de symétrie du courant, donc \vec{B} est parallèle à Oz. Toute translation perpendiculaire à Ox laisse invariant la distribution de courant, donc

$$\vec{B} = B(x) \vec{u}_z$$

2) La fonction exponentielle décroît assez rapidement, donc le courant est localisé entre $x = 0$ et $x =$ quelques fois a . Vu de très loin, cette région est assimilable au plan $x = 0$. A grande échelle, le plan $x = 0$ est quasiment un plan de symétrie du courant, donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Les champs magnétiques pour $x = \pm\infty$ sont donc opposés.

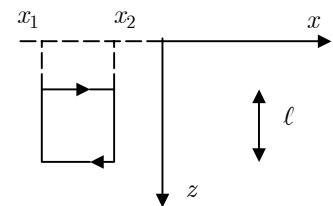
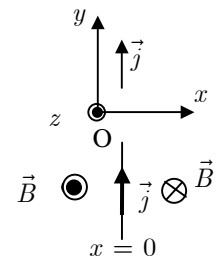
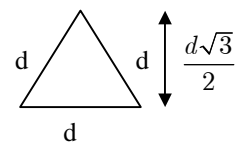
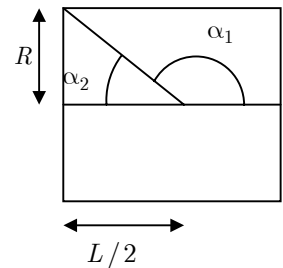
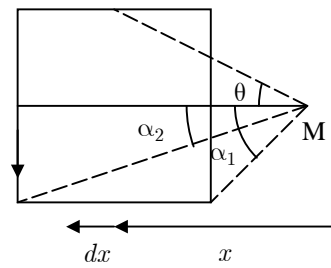
3) Soit $B_0 \vec{u}_z = \lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{B}$. Appliquons le théorème d'Ampère au rectangle de la figure ci-contre : $[B(x_1) - B(x_2)] \ell = \mu_0 \int_{x_1}^{x_2} j(x) \ell dx$.

Il en résulte que si $x < 0$, \vec{B} est uniforme.

Si $x > 0$, $B_0 - B(x) = \mu_0 \int_0^x j_0 \exp(-x/a) dx = \mu_0 j_0 a [1 - \exp(-x/a)]$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $2B_0 = \mu_0 j_0 a \Rightarrow B_0 = \mu_0 j_0 a / 2$. D'où

Si $x < 0$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \vec{u}_z$;	si $x > 0$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \left[2 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) - 1 \right] \vec{u}_z$
------------	---	------------	--



V.

1) D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique est perpendiculaire au plan de figure, dirigé vers l'avant et vaut :

$$B = \int \frac{\mu_0 I dl \sin(\theta + \pi/2)}{4\pi r^2}$$

$$\ell = b \tan \theta \Rightarrow d\ell = \frac{bd\theta}{\cos^2 \theta} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{b}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{b^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{bd\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha}^{\beta} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I (\sin \beta - \sin \alpha)}{4\pi b}$$

2) Chaque coté du carré crée le même champ magnétique. Le champ magnétique s'obtient en multipliant par 4 l'expression précédente et en y faisant :

$$\beta = \frac{\pi}{4} \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad b = \frac{a}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

3)

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$B_{AC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{3a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{1}{3\sqrt{10}}$$

$$B_{CD} = B_{EA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$B_{DE} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(\frac{1}{3\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \sqrt{2} \right)$$

L'expression est négative, car DE impose le sens de B.

VI.

1) Le champ magnétique en un point de l'axe est parallèle à l'axe, car celui-ci est un axe de révolution (ou de symétrie) de la distribution de courant.

2) Voir figure ci-contre.

$$3) \vec{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = B \vec{u}_z.$$

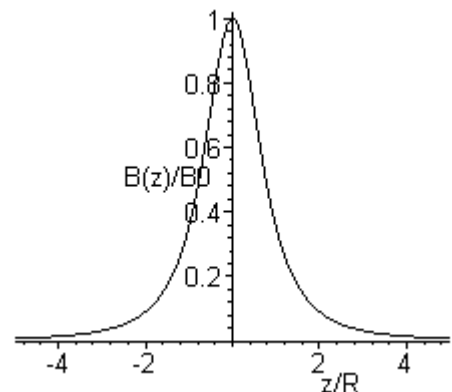
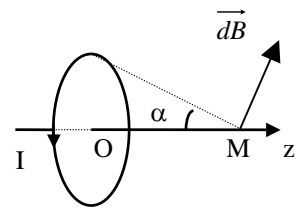
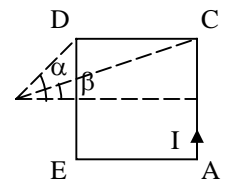
$d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$ a pour module $d\ell$, est dans le plan méridien et fait avec l'axe l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$B = \oint \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \alpha \oint d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \alpha 2\pi R$$

Comme $\sin \alpha = \frac{R}{r} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2}$, $\vec{B} = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_z$, où

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

4) Voir graphe ci-contre.



$$5) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} > 1 - 0,01 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{R^2} > 1 - 0,01 \quad \frac{z}{R} < \sqrt{\frac{2}{3}} 0,01 = 0,082$$

$$6) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{z^2}{R^2} > (999)^{2/3} \Rightarrow \frac{z}{R} > 10$$

7) Tout plan méridien est un plan d'antisymétrie du courant, donc un plan de symétrie du champ magnétique ; donc le champ magnétique est dans le plan méridien du point considéré, soit $B_\theta = 0$.

8) La distribution du courant étant de révolution autour de Oz, B_r et B_z ne dépendent pas de θ .

9) Comme l'axe est un axe de symétrie du courant, c'est aussi un axe de symétrie du champ magnétique, donc $B_z(r, z)$ est une fonction paire de r ; son développement au voisinage de l'axe jusque l'ordre 2 est $B_z(r, z) = B(z) + r^2 f(z)$, où $f(z)$ est une fonction inconnue de z .

10) Le même argument de symétrie montre que $B_r(r, z)$ est une fonction impaire de r ; son développement au voisinage de l'axe jusque l'ordre 2 est $B_r(r, z) = rg(z)$, où $g(z)$ est une fonction inconnue de z .

11) C'est une propriété générale du champ magnétique.

$$12) \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z(z+dz)\pi r^2 - B_z(z)\pi r^2 + 2\pi r dz B_r(r).$$

En exprimant que ce flux est nul et que $B_z(z+dz) - B_z(z) = dz \frac{\partial B_z}{\partial z}$, on obtient la relation demandée.

13) Cela résulte du théorème d'Ampère et de ce qu'il n'y a pas de courant dans la région.

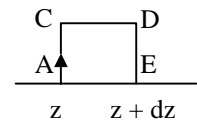
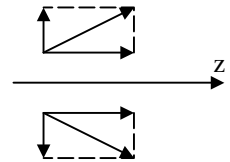
14)

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^r B_r(r') dr' = \int_0^r -\frac{r'}{2} \frac{dB(z)}{dz} dr' = -\frac{r^2}{4} \frac{dB(z)}{dz}$$

$$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = +\frac{r^2}{4} \frac{dB(z)}{dz} (z+dz)$$

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{r^2}{4} \left[\frac{dB(z)}{dz} (z+dz) - \frac{dB(z)}{dz} (z) \right] = \frac{r^2}{4} dz \frac{d^2 B(z)}{dz^2}$$

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = dz [B_z(r) - B_z(r=0)]$$



En écrivant que la circulation sur le parcours fermé ACDEA est nulle, on obtient $B_z(r, z) = B(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B(z)}{dz^2}$.

15)

$$B(z) = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

$$\frac{dB(z)}{dz} = -\frac{3}{2} \frac{2z}{R^2} B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2} = -\frac{3B_0 z}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2}$$

$$\frac{d^2 B(z)}{dz^2} = -\frac{3B_0}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2} - \frac{3B_0 z}{R^2} \times -\frac{5}{2} \frac{2z}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-7/2} = \frac{3B_0}{R^4} [5z^2 - (R^2 + z^2)] \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-7/2}$$

$$\frac{d^2 B(z)}{dz^2} = \frac{3B_0(4z^2 - R^2)}{R^4} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-7/2}$$

$$B_z(r, 0) = B_0 - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B(z)}{dz^2} (z=0) = B_0 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$16) \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} < 0,01 \Rightarrow \frac{r}{R} < \sqrt{\frac{4}{3}} \times 0,01 = 0,115.$$

VII. Validité du calcul du champ magnétique d'un courant rectiligne infini.

$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2}$ est perpendiculaire au plan de figure et dirigé vers l'avant. En décomposant

$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$, on voit que $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\theta}{r}$ s'exprime simplement en coordonnées polaires par rapport au point O.

$$1) \frac{a}{r} = \cos \theta ; B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta \cos \theta}{a} = \boxed{\frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi a}}.$$

$$2) B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi+2\varphi} \frac{d\theta}{R} = \boxed{\frac{\mu_0 I (\pi + 2\varphi)}{4\pi R}}.$$

$$3) B_0 = \frac{\pi_0 I}{2\pi a}.$$

$$\frac{|B - B_0|}{B_0} = \left| \frac{B_1 + B_2}{B_0} - 1 \right| = \left| \frac{\frac{2 \cos \varphi}{a} + \frac{\pi + 2\varphi}{R}}{\frac{2}{a}} - 1 \right| = \left| \frac{a}{R} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) - (1 - \cos \varphi) \right|.$$

Si φ est très petit, $1 - \cos \varphi \simeq \varphi^2 / 2 \ll \frac{a}{R} \simeq \varphi$; alors, $\frac{|B - B_0|}{B_0} \simeq \frac{\pi a}{2 R} < \frac{1}{100} \Rightarrow \boxed{\frac{R}{a} > 50\pi} = 160.$